

Potentiels thermodynamiques

4.6 Rayonnement du corps noir

☆☆☆☆ Un corps noir désigne un objet en l'équilibre thermique avec l'environnement qui émet un rayonnement dont la densité volumique d'énergie interne ne dépend que de la température. L'énergie interne de ce rayonnement est de la forme,

$$U(S, V) = \frac{3}{4} \left(\frac{3c}{16\sigma} \right)^{1/3} S^{4/3} V^{-1/3}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et où σ est la constante de Stefan-Boltzmann.

- 1) Déterminer l'énergie libre $F(T, V)$ du rayonnement.
- 2) Montrer que l'énergie interne $U(S, V)$ du rayonnement peut être obtenue en opérant une transformation de Legendre inverse de l'énergie libre $F(T, V)$.
- 3) Trouver les expressions $p(T, V)$ et $p(S, V)$ de la pression du rayonnement.

4.6 Solution

- 1) La température (2.16) du rayonnement du corps noir est définie comme,

$$T(S, V) = \frac{\partial U(S, V)}{\partial S} = \left(\frac{3c}{16\sigma} \right)^{1/3} S^{1/3} V^{-1/3}$$

En inversant cette relation, on obtient l'entropie du rayonnement $S(T, V)$ en fonction de la température T et du volume V ,

$$S(T, V) = \left(\frac{16\sigma}{3c} \right) T^3 V$$

En substituant cette équation dans l'expression de l'énergie interne du rayonnement $U(S, V)$ on trouve,

$$U(S(T, V), V) = \frac{4\sigma}{c} T^4 V$$

L'énergie libre $F(T, V)$ est obtenue par transformation de Legendre (4.21) de l'énergie interne $U(S, V)$ par rapport à l'entropie S ,

$$F(T, V) = U(S(T, V), V) - T S(T, V)$$

À l'aide des équations précédentes, cette transformation s'écrit explicitement,

$$F(T, V) = -\frac{4\sigma}{3c} T^4 V$$

2) L'entropie (4.25) du rayonnement du corps noir est définie comme,

$$S(T, V) = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial T} = \frac{16\sigma}{3c} T^3 V$$

En inversant cette relation, on obtient la température du rayonnement $T(S, V)$ en fonction de l'entropie S et du volume V ,

$$T(S, V) = \left(\frac{3c}{16\sigma}\right)^{1/3} S^{1/3} V^{-1/3}$$

En substituant cette équation dans l'expression de l'énergie libre du rayonnement $F(T, V)$ on obtient,

$$F(T(S, V), V) = -\frac{1}{4} \left(\frac{3c}{16\sigma}\right)^{1/3} S^{4/3} V^{-1/3}$$

L'énergie interne $U(S, V)$ est obtenue par transformation de Legendre (4.21) de l'énergie libre $F(T, V)$ par rapport à la température T ,

$$U(S, V) = F(T(S, V), V) + T(S, V) S$$

À l'aide des équations précédentes, cette transformation s'écrit explicitement,

$$U(S, V) = \frac{3}{4} \left(\frac{3c}{16\sigma}\right)^{1/3} S^{4/3} V^{-1/3}$$

3) À l'aide de la définition (2.17), la pression de radiation du corps noir $p(S, V)$ s'exprime en fonction de S et V comme,

$$p(S, V) = -\frac{\partial U(S, V)}{\partial V} = \frac{1}{4} \left(\frac{3c}{16\sigma}\right)^{1/3} S^{4/3} V^{-4/3}$$

À l'aide de la définition (4.26), la pression de radiation du corps noir $p(T, V)$ s'exprime en fonction de T et V comme,

$$p(T, V) = -\frac{\partial F(T, V)}{\partial V} = \frac{4\sigma}{3c} T^4$$

En substituant l'entropie $S(T, V)$ ou la température $T(S, V)$ dans l'expression des pressions $p(S, V)$ ou $p(T, V)$, on arrive à la conclusion qu'elles sont égales comme il se doit.

4.7 Gaz parfait

☆☆☆☆ Les gaz suffisamment dilués se comportent comme des gaz parfaits à température ambiante. Au chapitre 5, on montrera que la variation de l'entropie d'un système simple constitué de N moles de gaz parfait lors d'un processus $i \rightarrow f$ s'écrit,

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = cNR \ln \left(\frac{U_f}{U_i} \right) + NR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

où c est un paramètre constant positif, R est la constante des gaz parfaits, U_i et U_f sont les énergies internes initiale et finale et V_i et V_f sont les volumes initial et final.

- 1) Montrer que l'entropie du gaz parfait peut alors être écrite comme,

$$S(U, V) = NR \ln \left(\left(\frac{U}{U_0} \right)^c \frac{V}{V_0} \right) + S_0$$

où l'entropie S_0 , l'énergie interne U_0 , le volume V_0 sont des constantes. Ces constantes satisfont les identités suivantes,

$$U_0 = cNR T_0 = c p_0 V_0$$

où la température T_0 et la pression p_0 sont aussi des constantes.

- 2) Déterminer l'énergie interne $U(S, V)$ du gaz parfait.
- 3) Déterminer l'énergie libre $F(T, V)$ du gaz parfait.
- 4) Déterminer l'enthalpie $H(S, p)$ du gaz parfait.
- 5) Déterminer l'énergie libre $G(T, p)$ du gaz parfait.

4.7 Solution

- 1) En définissant les grandeurs initiale et finale comme,

$$\begin{array}{llll} S_0 \equiv S_i & \text{et} & U_0 \equiv U_i & \text{et} & V_0 \equiv V_i \\ S \equiv S_f & \text{et} & U \equiv U_f & \text{et} & V \equiv V_f \end{array}$$

La variation d'entropie du processus s'écrit,

$$S - S_0 = cNR \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + NR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = NR \left(\ln \left(\frac{U}{U_0} \right)^c + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \right)$$

Ainsi, l'entropie est,

$$S(U, V) = NR \ln \left(\left(\frac{U}{U_0} \right)^c \frac{V}{V_0} \right) + S_0$$

- 2) En inversant l'entropie $S(U, V)$ du gaz parfait, on obtient son énergie interne,

$$U(S, V) = U_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{1}{c}} \exp \left(\frac{S - S_0}{cNR} \right) = cNR T_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{1}{c}} \exp \left(\frac{S - S_0}{cNR} \right)$$

La température (2.16) du gaz parfait est définie comme,

$$T(S, V) = \frac{\partial U(S, V)}{\partial S} = T_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{1}{c}} \exp \left(\frac{S - S_0}{cNR} \right)$$

En inversant cette relation, on obtient l'entropie du gaz parfait en fonction de la température et du volume,

$$S(T, V) = cNR \ln \left(\frac{T}{T_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{1}{c}} \right) + S_0$$

En substituant cette équation dans l'expression de l'énergie interne du gaz parfait $U(S, V)$, l'énergie interne du gaz parfait est alors exprimée en termes de la température comme,

$$U(S(T, V), V) = cNRT$$

- 3) L'énergie libre $F(T, V)$ est obtenue par transformation de Legendre (4.21) de l'énergie interne $U(S, V)$ par rapport à l'entropie S ,

$$F(T, V) = U(S(T, V), V) - TS(T, V)$$

À l'aide des équations précédentes, cette transformation s'écrit explicitement,

$$F(T, V) = cNRT \left(1 - \ln \left(\frac{T}{T_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{\frac{1}{c}} \right) \right) - TS_0$$

- 4) La pression (2.17) du gaz parfait est définie comme,

$$p(S, V) = - \frac{\partial U(S, V)}{\partial V} = \frac{1}{c} \frac{U_0}{V_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{c+1}{c}} \exp \left(\frac{S - S_0}{cNR} \right)$$

qui est remise en forme comme,

$$p(S, V) = p_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-\frac{c+1}{c}} \exp \left(\frac{S - S_0}{cNR} \right)$$

En inversant cette relation, on obtient le volume du gaz parfait $V(S, p)$ en fonction de l'entropie et de la pression,

$$V(S, p) = V_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{c}{c+1}} \exp \left(\frac{S - S_0}{(c+1)NR} \right)$$

En substituant cette équation dans l'expression de l'énergie interne du gaz parfait $U(S, V)$, compte tenu de l'identité,

$$\exp \left(\frac{S - S_0}{cNR} \right) = \exp \left(\frac{S - S_0}{(c+1)NR} \right)^{\frac{c+1}{c}}$$

on obtient l'expression suivante,

$$U(S, V(S, p)) = cNR T_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{-\frac{1}{c+1}} \exp \left(\frac{S - S_0}{(c+1)NR} \right)^{-\frac{1}{c}} \exp \left(\frac{S - S_0}{(c+1)NR} \right)^{\frac{c+1}{c}}$$

qui est remise en forme comme,

$$U(S, V(S, p)) = cNR T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{c+1}} \exp \left(\frac{S - S_0}{(c+1)NR} \right)$$

L'enthalpie $H(S, p)$ est obtenue par transformation de Legendre (4.29) de l'énergie interne $U(S, V)$ par rapport au volume,

$$H(S, p) = U(S, V(S, p)) + pV(S, p)$$

À l'aide des équations précédentes, cette transformation s'écrit explicitement,

$$H(S, p) = \left(cNR T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{c+1}} + pV_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{c}{c+1}} \right) \exp \left(\frac{S - S_0}{(c+1)NR} \right)$$

Compte tenu de l'identité,

$$pV_0 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{c}{c+1}} = cNR T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{c}{c+1}} = NR T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{c+1}}$$

l'enthalpie $H(S, p)$ se réduit à,

$$H(S, p) = (c+1)NR T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{c+1}} \exp \left(\frac{S - S_0}{(c+1)NR} \right)$$

La température (4.33) du gaz parfait est définie comme,

$$T(S, p) = \frac{\partial H(S, p)}{\partial S} = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{c+1}} \exp \left(\frac{S - S_0}{(c+1)NR} \right)$$

En inversant cette relation, on obtient l'entropie du gaz parfait $S(T, p)$ en fonction de la température et de la pression,

$$S(T, p) = (c+1)NR \ln \left(\frac{T}{T_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{c+1}} \right) + S_0$$

En substituant cette équation dans l'expression de l'enthalpie du gaz parfait $H(S, p)$, elle est alors exprimée en termes de l'entropie et de la température comme,

$$H(S(T, p), p) = (c+1)NR T$$

- 5) L'énergie libre $G(T, p)$ est obtenue par transformation de Legendre (4.37) de l'enthalpie $H(S, p)$ par rapport à l'entropie S ,

$$G(T, p) = H(S(T, p), p) - T S(T, p)$$

À l'aide des équations précédentes, cette transformation s'écrit explicitement,

$$G(T, p) = (c + 1) N R T \left(1 - \ln \left(\frac{T}{T_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{c+1}} \right) \right) - T S_0$$

Le volume (4.42) du gaz parfait est définie comme,

$$V(T, p) = \frac{\partial G(T, p)}{\partial p} = \frac{N R T}{p}$$

En inversant cette relation, on obtient la pression du gaz parfait $p(T, V)$ en fonction de la température et du volume,

$$p(T, V) = \frac{N R T}{V}$$

4.13 Propriétés thermomécaniques d'un élastique

☆☆☆☆ L'état d'un élastique est décrit par les variables d'état entropie S et de longueur L . La différentielle de l'énergie interne $U(S, L)$ de l'élastique s'écrit,

$$dU(S, L) = \frac{\partial U(S, L)}{\partial S} dS + \frac{\partial U(S, L)}{\partial L} dL = T(S, L) dS + f(S, L) dL$$

où $f(S, L)$ est la norme de la force résultante exercée sur l'élastique. Les propriétés physiques du matériau de l'élastique sont caractérisées par le coefficient de dilatation à force constante,

$$\alpha_f = \frac{1}{L} \frac{\partial L(T, f)}{\partial T}$$

le coefficient de compressibilité isotherme,

$$\chi_T = \frac{1}{L} \frac{\partial L(T, f)}{\partial f}$$

et la capacité thermique à longueur constante,

$$C_L = T \frac{\partial S(T, L)}{\partial T}$$

Utiliser ces trois propriétés physiques du matériau, considérées comme des constantes, pour répondre aux questions suivantes.

- 1) Déterminer la dérivée partielle de la force résultante $f(T, L)$ exercée sur l'élastique par rapport à la température lorsque sa longueur est fixée.
- 2) Exprimer le transfert de chaleur durant la variation isotherme de la longueur $\Delta L_{i \rightarrow f}$ de l'élastique d'un état initial i à un état final f .
- 3) Déterminer la dérivée partielle de la température T de l'élastique par rapport à sa longueur L lors d'un processus adiabatique réversible.

4.13 Solution

- 1) En appliquant l'identité cyclique de dérivées partielles (4.97) à la force $f(T, L)$, on obtient,

$$\frac{\partial f(T, L)}{\partial T} \frac{\partial T(L, f)}{\partial L} \frac{\partial L(T, f)}{\partial f} = -1$$

et ainsi,

$$\frac{\partial f(T, L)}{\partial T} = - \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L(T, f)}{\partial T} \right) \left(\frac{1}{L} \frac{\partial L(T, f)}{\partial f} \right)^{-1} = - \frac{\alpha_f}{\chi_T}$$

- 2) À température constante T , le transfert infinitésimal de chaleur s'écrit,

$$\delta Q = T dS(T, L) = T \frac{\partial S(T, L)}{\partial L} dL$$

L'énergie libre $F(T, L)$ est la transformée de Legendre de l'énergie interne $U(S, L)$ par rapport à l'entropie $S(T, L)$,

$$F(T, L) = U(S(T, L), L) - T S(T, L)$$

La différentielle de l'énergie libre s'écrit,

$$dF(T, L) = dU(S(T, L), L) - T dS(T, L) - S(T, L) dT$$

Compte tenu de la différentielle de l'énergie libre,

$$dU(S(T, L), L) = T dS(T, L) + f(T, L) dL$$

La différentielle de l'énergie libre s'écrit,

$$dF(T, L) = -S(T, L) dT + f(T, L) dL$$

Le théorème de Schwarz appliqué à l'énergie libre $F(T, L)$ s'écrit,

$$\frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{\partial F(T, L)}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial F(T, L)}{\partial L} \right)$$

ce qui donne la relation de Maxwell,

$$-\frac{\partial S(T, L)}{\partial L} = \frac{\partial f(T, L)}{\partial T} = -\frac{\alpha_f}{\chi_T} = \text{cste}$$

À l'aide de la relation de Maxwell, le transfert infinitésimal de chaleur peut être mis sous la forme,

$$\delta Q = T \frac{\partial S(T, L)}{\partial L} dL = -T \frac{\partial f(T, L)}{\partial T} dL = T \frac{\alpha_f}{\chi_T} dL$$

L'intégration de la chaleur infinitésimale fournie à l'élastique à température constante T de l'état initial i à l'état final f s'écrit,

$$Q_{i \rightarrow f} = \int_i^f \delta Q = T \frac{\alpha_f}{\chi_T} \int_{L_i}^{L_f} dL$$

Ainsi, après intégration du transfert de chaleur infinitésimal δQ à température T constante, on obtient le transfert de chaleur pour un processus isotherme d'un état initial i à un état final f ,

$$Q_{i \rightarrow f} = T \frac{\alpha_f}{\chi_T} \Delta L_{i \rightarrow f}$$

- 3) Pour un processus adiabatique réversible, on doit déterminer la dérivée de la longueur $L(S, T)$ par rapport à la température lorsque l'entropie est maintenue constante. À l'aide de l'identité cyclique de dérivées partielles (4.97) et de la dérivée partielle de l'entropie par rapport à la longueur obtenue au point 2), on trouve,

$$\frac{\partial T(S, L)}{\partial L} = - \frac{\partial T(S, L)}{\partial S} \frac{\partial S(T, L)}{\partial L} = - \frac{T}{C_L} \frac{\partial S(T, L)}{\partial L} = - \frac{\alpha_f}{\chi_T C_L} T$$

4.15 Sous-systèmes et réservoir de chaleur et de travail

☆☆☆☆ On considère un système fermé et déformable contenant un gaz homogène. Le système est constitué de deux sous-systèmes simples séparés par une paroi fixe, perméable et diatherme. Le système a une température T et une pression p constantes car il est à l'équilibre thermique et mécanique avec un réservoir de chaleur et de travail à température T_{ext} et pression p_{ext} (fig. 4.1). L'énergie interne de la paroi est négligeable.

- 1) Exprimer la différentielle de l'énergie libre dG en fonction de la source d'entropie Σ_S .
- 2) Exprimer la différentielle de l'énergie libre dG en fonction des potentiels chimiques μ_1 et μ_2 du gaz dans les sous-systèmes 1 et 2. En déduire que $dG \leq 0$.

4.15 Solution

- 1) Compte tenu de la définition (4.40) à température T et pression p constantes, la différentielle de l'énergie libre dG s'écrit,

$$dG = dU - T dS + p dV$$

Comme le système est fermé, le courant énergétique de matière du réservoir vers le système est nul, c'est-à-dire $I_C = 0$. Compte tenu du travail infinitésimal (2.43) effectué par le réservoir sur le système et du premier principe (1.59) pour un système fermé,

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - p dV$$

À l'aide de la chaleur infinitésimale (1.56), du deuxième principe (2.29) et de $dS = \dot{S} dt$, la différentielle de l'énergie libre de Gibbs peut être mise sous la forme,

$$dG = \delta Q - T dS = \left(I_Q - T \dot{S} \right) dt = -T \Sigma_S dt \leq 0$$

- 2) L'énergie libre de Gibbs du système $G(T_1, T_2, p_1, p_2, N_1, N_2)$ est la somme des énergies libres $G_1(T_1, p_1, N_1)$ et $G_2(T_2, p_2, N_2)$ des deux sous-systèmes,

$$G(T_1, T_2, p_1, p_2, N_1, N_2) = G_1(T_1, p_1, N_1) + G_2(T_2, p_2, N_2)$$

À l'équilibre thermique et mécanique, les températures T_1 et T_2 et les pressions p_1 et p_2 des deux sous-systèmes sont égales à celles du réservoir de chaleur et de travail T_{ext} et p_{ext} ,

$$T = T_1 = T_2 = T_{\text{ext}}$$

$$p = p_1 = p_2 = p_{\text{ext}}$$

La différentielle de l'énergie libre de Gibbs dG à température T et pression p constantes s'écrit,

$$dG = \frac{\partial G_1}{\partial N_1} dN_1 + \frac{\partial G_2}{\partial N_2} dN_2$$

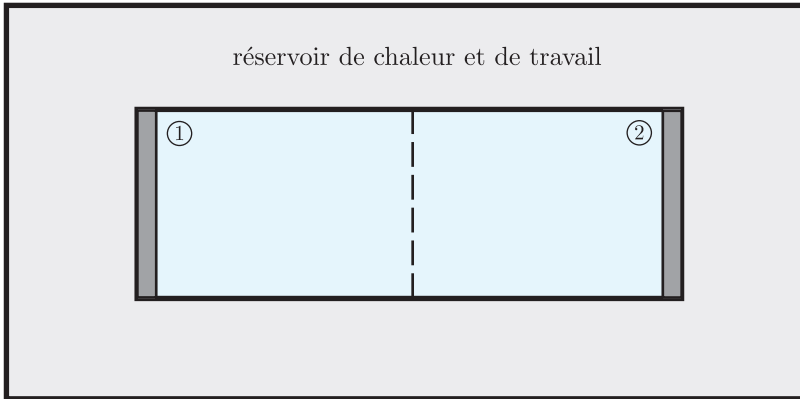


Fig. 4.1 Un système fermé et déformable contenant un gaz homogène est divisé en deux sous-systèmes simples par une paroi fixe, perméable et diatherme. Le système est à l'équilibre thermique et mécanique avec un réservoir de chaleur à température T_{ext} et pression p_{ext} .

Étant donné que le système est fermé, la différentielle du nombre total de moles de gaz dN s'annule,

$$dN = dN_1 + dN_2 = 0 \quad \text{ainsi} \quad dN_2 = -dN_1$$

De plus, en appliquant la définition (4.43) aux deux sous-systèmes, on obtient,

$$\mu_1 = \frac{\partial G_1}{\partial N_1} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{\partial G_2}{\partial N_2}$$

Par conséquent, la différentielle de l'énergie libre de Gibbs dG à température T pression p constantes se réduit à,

$$dG = (\mu_1 - \mu_2) dN_1$$

Cette équation donne lieu à trois types de solutions. Premièrement, dans le cas où $\mu_1 > \mu_2$, le gaz se déplace du sous-système 1 vers le sous-système 2,

$$\mu_1 > \mu_2 \quad \text{et} \quad dN_1 < 0 \quad \text{ainsi} \quad dG < 0$$

Deuxièmement, dans le cas où $\mu_1 < \mu_2$, le gaz se déplace du sous-système 2 vers le sous-système 1,

$$\mu_1 < \mu_2 \quad \text{et} \quad dN_1 > 0 \quad \text{ainsi} \quad dG < 0$$

Troisièmement, dans le cas où $\mu_1 = \mu_2$, c'est-à-dire à l'équilibre chimique (3.72), il n'y a plus de transfert de gaz à travers la paroi,

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{et} \quad dN_1 = 0 \quad \text{ainsi} \quad dG = 0$$

Ainsi,

$$dG \leq 0$$

4.16 Turbine isotherme

☆☆☆☆ On considère un système ouvert constitué de deux sous-systèmes simples, considérés comme des blocs rigides contenant un fluide incompressible homogène en mouvement à vitesse uniforme. Les deux blocs sont séparés par une turbine effectuant un travail externe sur le fluide lors de son transfert du sous-système 1 au sous-système 2. L'ensemble est maintenu à température constante T (fig. 4.2). L'énergie interne de la machine est négligeable. Les transferts de chaleur et de matière à travers la machine sont stationnaires. Ainsi, par rapport au référentiel des blocs, les vitesses \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 du fluide dans les deux blocs sont constantes et telles que $\mathbf{v}_1^2 > \mathbf{v}_2^2$. De plus, l'énergie cinétique de rotation de la turbine est constante et n'intervient pas dans l'analyse.

On dénote $I_Q^{0 \rightarrow 1}$ et $I_C^{0 \rightarrow 1}$ le courant de chaleur et le courant énergétique de matière de l'environnement vers le bloc 1, $I_Q^{1 \rightarrow 2}$ et $I_C^{1 \rightarrow 2}$ le courant de

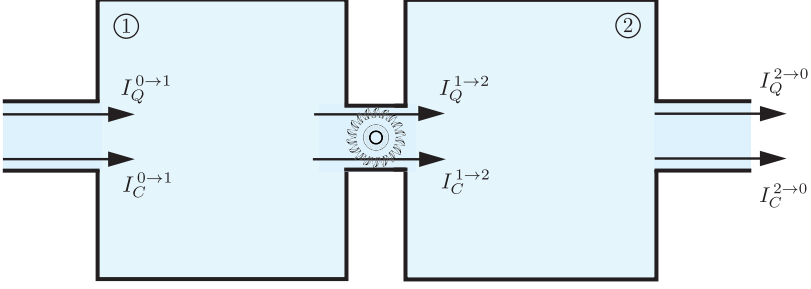


Fig. 4.2 Une turbine effectue un travail externe sur un fluide qui est transféré de manière stationnaire du bloc 1 au bloc 2 à température constante. Les courants de chaleur $I_Q^{0 \rightarrow 1}$ et $I_Q^{2 \rightarrow 0}$ décrivent le transfert de chaleur entre l'environnement et le système et les courants énergétiques de matière $I_C^{0 \rightarrow 1}$ et $I_C^{2 \rightarrow 0}$ décrivent le transfert de matière.

chaleur et le courant énergétique de matière du bloc 1 vers le bloc 2, et $I_Q^{2 \rightarrow 0}$ et $I_C^{2 \rightarrow 0}$ le courant de chaleur et le courant énergétique de matière du bloc 2 vers l'environnement. On suppose que le transfert de matière entre l'environnement et chaque bloc a lieu au potentiel chimique du bloc. Au chapitre 8, on montrera que les potentiels chimiques du fluide dans les sous-systèmes s'écrivent,

$$\mu_1 = h_1 - T s_1 \quad \text{et} \quad \mu_2 = h_2 - T s_2$$

où h_1 et h_2 sont les enthalpies molaires du fluide dans les deux blocs et s_1 et s_2 sont les entropies molaires du fluide dans les deux blocs. Durant le transfert stationnaire de matière et de chaleur :

- 1) Montrer que les courants de fluide satisfont l'identité,

$$I = I^{0 \rightarrow 1} = I^{1 \rightarrow 2} = I^{2 \rightarrow 0} > 0$$

- 2) À l'aide des équations de bilan de masse et des courants de masse,

$$I_M^{0 \rightarrow 1} = m I^{0 \rightarrow 1} \quad \text{et} \quad I_M^{2 \rightarrow 0} = m I^{2 \rightarrow 0}$$

où m est la masse molaire du fluide, montrer que les courants de masse satisfont l'identité,

$$I_M = I_M^{0 \rightarrow 1} = I_M^{1 \rightarrow 2} = I_M^{2 \rightarrow 0} > 0$$

- 3) À l'aide des courants d'entropie,

$$I_S^{0 \rightarrow 1} = s_1 I^{0 \rightarrow 1} \quad \text{et} \quad I_S^{2 \rightarrow 0} = s_2 I^{2 \rightarrow 0}$$

exprimer le courant de chaleur I_Q de l'environnement vers le système en termes du courant de fluide I et des entropies molaires s_1 et s_2 .

- 4) Exprimer le courant énergétique de matière I_C de l'environnement vers le système en termes du courant de fluide I , des enthalpies molaires h_1 et h_2 et des entropies molaires s_1 et s_2 .

- 5) Déterminer le courant d'énergie interne I_U de l'environnement vers le système.
- 6) Exprimer la puissance extérieure P^{ext} de la turbine en termes du courant de fluide I et de la masse molaire m .
- 7) Déterminer la relation qui lie les enthalpies molaires h_1 et h_2 et les vitesses v_1 et v_2 du fluide.
- 8) Dans le cas particulier où la turbine se comporte comme une paroi perméable qui laisse simplement passer le fluide d'un bloc à l'autre sans effectuer de travail externe, c'est-à-dire que $P^{\text{ext}} = 0$, lier les vitesses v_1 et v_2 entre elles et les enthalpies molaires h_1 et h_2 du fluide entre elles.

4.16 Solution

- 1) Pour un transfert stationnaire de matière entre les blocs, l'équation de bilan de fluide (2.22) dans chaque bloc s'écrit,

$$\dot{N}_1 = I^{0 \rightarrow 1} - I^{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{N}_2 = I^{1 \rightarrow 2} - I^{2 \rightarrow 0} = 0$$

Ainsi, on en conclut que,

$$I = I^{0 \rightarrow 1} = I^{1 \rightarrow 2} = I^{2 \rightarrow 0} > 0$$

- 2) Étant donné qu'il n'y a pas de source de masse, l'équation de bilan de masse dans chaque bloc pour un transfert stationnaire de masse entre les blocs s'écrit,

$$\dot{M}_1 = I_M^{0 \rightarrow 1} - I_M^{1 \rightarrow 2} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{M}_2 = I_M^{1 \rightarrow 2} - I_M^{2 \rightarrow 0} = 0$$

où $I_M^{0 \rightarrow 1}$, $I_M^{1 \rightarrow 2}$ et $I_M^{2 \rightarrow 0}$ sont respectivement les courants de masse entre l'environnement et le bloc 1, le bloc 1 et le bloc 2 et le bloc 2 et l'environnement. Ainsi, on en conclut que,

$$I_M = I_M^{0 \rightarrow 1} = I_M^{1 \rightarrow 2} = I_M^{2 \rightarrow 0} > 0$$

Les courants de masse liés au transfert de matière entre l'environnement et le bloc 1 et entre le bloc 2 et l'environnement s'écrivent,

$$I_M^{0 \rightarrow 1} = m I^{0 \rightarrow 1} = m I \quad \text{et} \quad I_M^{2 \rightarrow 0} = m I^{2 \rightarrow 0} = m I$$

Ainsi,

$$I_M = m I$$

- 3) Le courant de chaleur de l'environnement vers le système à température T s'écrit,

$$I_Q = I_Q^{0 \rightarrow 1} - I_Q^{2 \rightarrow 0} = T I_S^{0 \rightarrow 1} - T I_S^{2 \rightarrow 0} = T s_1 I^{0 \rightarrow 1} - T s_2 I^{2 \rightarrow 0}$$

Les courants d'entropie liés au transfert de matière entre l'environnement et le bloc 1 et entre le bloc 2 et l'environnement s'écrivent,

$$I_S^{0 \rightarrow 1} = s_1 I^{0 \rightarrow 1} = s_1 I \quad \text{et} \quad I_S^{2 \rightarrow 0} = s_2 I^{2 \rightarrow 0} = s_2 I$$

Le transfert de chaleur est stationnaire (2.36). Or, le courant d'entropie I_S n'est pas nul. Compte tenu de l'équation de bilan d'entropie (2.3), la source d'entropie Σ_S n'est pas nulle non plus, ce qui signifie que le processus est irréversible,

$$\Sigma_S = -I_S = -(I_S^{0 \rightarrow 1} - I_S^{2 \rightarrow 0}) = -(s_1 - s_2) I > 0$$

Ainsi,

$$s_2 > s_1$$

Par conséquent, le courant de chaleur de l'environnement vers le système se réduit à,

$$I_Q = T I_S = T (s_1 - s_2) I < 0$$

Ainsi, il y a un transfert de chaleur du système vers l'environnement afin de compenser la chaleur dégagée dans le système par dissipation.

- 4) Le courant énergétique de matière de l'environnement vers le système (2.32) s'écrit,

$$I_C = I_C^{0 \rightarrow 1} - I_C^{2 \rightarrow 0} = \mu_1 I^{0 \rightarrow 1} - \mu_2 I^{2 \rightarrow 0} = (\mu_1 - \mu_2) I$$

Ainsi, il est exprimé en termes des enthalpies molaires comme,

$$I_C = \left((h_1 - T s_1) - (h_2 - T s_2) \right) I$$

- 5) Le courant d'énergie interne (1.50) s'écrit,

$$I_U = I_Q + I_C = (h_1 - h_2) I$$

- 6) Étant donné que les vitesses du fluide sont uniformes dans chaque bloc, la puissance extérieure de la turbine est la variation temporelle de l'énergie cinétique du système due au courant de masse entre l'environnement et les blocs,

$$P^{\text{ext}} = \frac{1}{2} I_M^{2 \rightarrow 0} v_2^2 - \frac{1}{2} I_M^{0 \rightarrow 1} v_1^2 = -\frac{1}{2} I_M (v_1^2 - v_2^2) = -\frac{1}{2} m I (v_1^2 - v_2^2)$$

Ainsi, la puissance extérieure de la turbine,

$$P^{\text{ext}} = -\frac{1}{2} m I (v_1^2 - v_2^2) < 0$$

est négative car $v_1^2 > v_2^2$ ce qui signifie que le système, c'est-à-dire le fluide, effectue un travail extérieur $W^{\text{ext}} < 0$ sur la turbine et non l'inverse.

- 7) Compte tenu du premier principe (1.71) pour un transfert stationnaire de matière entre l'environnement et les deux blocs rigides, c'est-à-dire $P_W = 0$,

$$\dot{E} = I_Q + I_C + P^{\text{ext}} = I_U + P^{\text{ext}} = 0$$

on conclut aussi du premier principe que la puissance extérieure de la turbine s'écrit,

$$P^{\text{ext}} = -I_U = (h_2 - h_1) I$$

La turbine n'est pas un système simple, car il n'existe pas de référentiel au repos du système. Par conséquent, on ne peut utiliser l'équation de bilan d'énergie interne (1.48) qui est définie par rapport au référentiel au repos. En comparant les deux expressions de la puissance extérieure P^{ext} , on en conclut que,

$$(h_2 - h_1) I = -\frac{1}{2} m I (\mathbf{v}_1^2 - \mathbf{v}_2^2)$$

Par conséquent, la différence entre l'énergie cinétique molaire et l'enthalpie molaire du fluide est conservée par la turbine isotherme,

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 - h_1 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - h_2$$

- 8) Si la turbine ne travaille pas, la puissance extérieure est nulle, c'est-à-dire que $P^{\text{ext}} = 0$. Ainsi, il n'y a pas de variation d'énergie cinétique et donc les vitesses sont égales,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$$

On en conclut alors que les enthalpies molaires sont aussi égales,

$$h_1 = h_2$$

comme dans la détente de Joule-Thomson qui est isenthalpique.